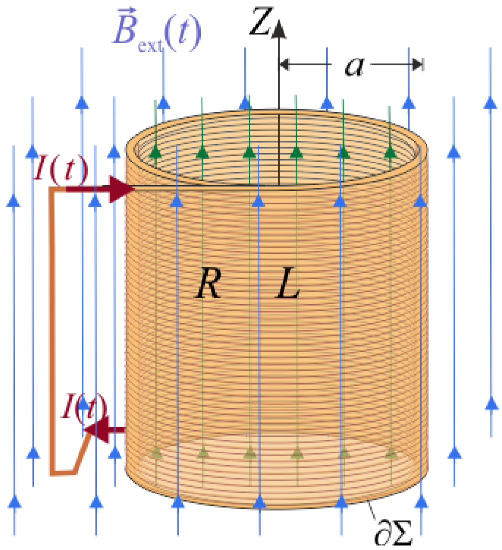
1 Enunciado

Una bobina $\partial\Sigma$ de resistencia eléctrica R y autoinducción L está formada por N espiras circulares idénticas de radio a, todas perpendiculares al eje OZ que pasa por sus centros. La espira está cortocircuitada y sometida a un campo magnético externo uniforme y variable en el tiempo $\vec{B}_{\text{ext}}(t) = B(t)\,\vec{k}$. El resultado es que la bobina es recorrida por una intensidad de corriente $I(t)$ medida en el sentido antihorario.



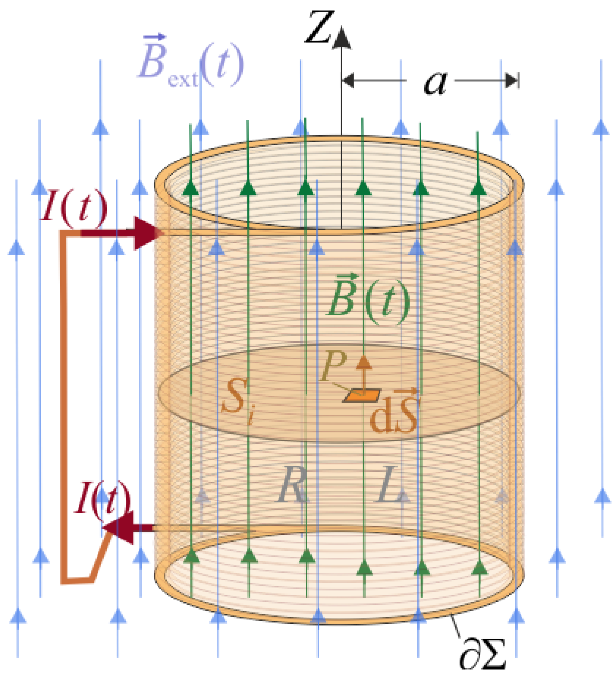
1. Obtenga la expresión del flujo magnético total a través de las N espiras que forman la bobina (no olvidar que su autoinducción tiene un valor apreciable).
2. Aplique las leyes de la inducción electromagnética para determinar cómo deber ser la ley horaria $B(t)$ que verifica el campo magnético externo para que la bobina sea recorrida por una corriente eléctrica de intensidad constante, I_0.
3. En las condiciones del apartado anterior, ¿qué energía magnética se almacena en la bobina? ¿Qué cantidad de energía por unidad de tiempo se disipa en la bobina por efecto Joule?

2 Solución

Fundamento teórico

Un campo magnético variable en el tiempo fluye a través de la superficie Σ que se apoya en la bobina cilíndrica recta $\partial\Sigma$, constituida por N espiras iguales dispuesta sin solución de continuidad en una serie de planos paralelos entre sí y perpendiculares al eje OZ de la bobina. Y puesto que la bobina está sometida a un campo externo variable en el tiempo, el flujo magnético a través de la misma será, en general, función del tiempo, $\Phi_m\rfloor_\Sigma = \Phi_m(t)$. En virtud de las **leyes de la inducción electromagnética**, dicho flujo variable inducirá una fuerza electromotriz en el circuito, opuesta a la variación instantánea del flujo magnético.

$$\mathcal{E}(t)\rfloor_{\partial\Sigma} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_m(t)}{\mathrm{d}t}\bigg\rfloor_\Sigma$$



Y como la bobina está cortocircuitada, dicha fuerza electromotriz genera una corriente eléctrica en aquélla cuya intensidad es proporcional a la f.e.m., siendo la constante de proporcionalidad el valor inverso de la resistencia eléctrica de la bobina.

$$I(t) = \frac{1}{R}\,\mathcal{E}(t)\rfloor_{\partial\Sigma}$$

Obsérvese que, según la ley de Biot y Savart, esta corriente eléctrica circulando por el conductor filiforme $\partial\Sigma$ (la bobina cortocircuitada), será la fuente de un campo magnético, que denominaremos $\vec{B}_{\text{cor}}$. Y puesto que, en general, la intensidad de la corriente va a ser variable en el tiempo, el campo magnético que genera también lo será. En general, este campo no va a ser uniforme, de manera que estará representado por un vector distinto en cada punto P del espacio (y en cada instante):

$$I(t)\rfloor_{\partial\Sigma} \longrightarrow \vec{B}_{\text{cor}}(\vec{r};t); \quad \text{con} \quad \vec{r} = \overrightarrow{OP}$$

La forma de éste campo va a depender de la geometría de la bobina, y sólo en el caso de que ésta cumpliera las condiciones de **bobina larga** el campo magnético generado por la corriente será aproximadamente uniforme en el interior de la misma y prácticamente nulo en el exterior:

$$\frac{a}{h} \lll 1 \quad \Longrightarrow \quad \vec{B}_{\rm cor}(\vec{r};t) \approx \begin{cases} \mu_0\, n\, I(t)\, \vec{k}, & \text{si} \quad P \in \Sigma \\ \\ \vec{0}, & \text{si} \quad P \notin \Sigma \end{cases}$$

donde h sería la longitud de la bobina, y $n = N/h$, la densidad de espiras en la misma.

En cualquier caso, el campo magnético, $\vec{B}_{\rm cor}(\vec{r};t)$ creado por la corriente eléctrica que recorre la bobina, se superpone con el campo externo uniforme y variable en el tiempo, $\vec{B}_{\rm ext}(t)$ que se indica en el enunciado. Por tanto, el flujo magnético a través de la superficie Σ definida por la bobina $\partial\Sigma$ está determinado por la resultante de la superposición de ambos campos magnéticos. En consecuencia, dicho flujo magnético puede descomponerse en dos términos, siendo cada uno de ellos el flujo de la correspondiente componente del campo magnético total:

$$\vec{B}(\vec{r};t) = \vec{B}_{\rm ext}(t) + \vec{B}_{\rm cor}(\vec{r};t) \quad \Longrightarrow \quad \Phi_m(t)\big]_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \vec{B}(\vec{r};t)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \Phi_m^{\rm ext}(t) + \Phi_m^{\rm cor}(t), \quad \text{con} \quad \begin{cases} \Phi_m^{\rm ext}(t) = \displaystyle\int_{\Sigma} \vec{B}_{\rm ext}(t)\cdot \mathrm{d}\vec{S} \\ \\ \Phi_m^{\rm cor}(t) = \displaystyle\int_{\Sigma} \vec{B}_{\rm cor}(\vec{r};t)\cdot \mathrm{d}\vec{S} \end{cases}$$

Autoinducción de la bobina

Consideremos sólo el segundo de estos términos: el flujo magnético a través de la bobina de la componente de campo magnético creado por la corriente que la recorre, $\Phi_m^{\rm cor}$, y que podríamos denominar *autoflujo*. En virtud de la ley de Biot y Savart, dicho campo magnético puede expresarse como una función vectorial de la posición, determinada por la forma de la bobina $\partial\Sigma$, multiplicada por la intensidad de la corriente que la recorre. Y al calcular el *autoflujo* se obtiene que, en cada instante, éste va a ser proporcional a la intensidad de la corriente. El factor de proporcionalidad dependerá exclusivamente de la geometría de la bobina por lo que, si ésta no cambia de forma, tendrá un valor constante:

$$\vec{B}_{\rm cor}(\vec{r};t) = I(t)\,\frac{\mu_0}{4\,\pi}\int_{\partial\Sigma} \frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^{3/2}} = I(t)\,\vec{f}_{\partial\Sigma}(\vec{r}) \quad \Longrightarrow \quad \Phi_m^{\rm cor}(t) = I(t)\underbrace{\int_{\Sigma} \vec{f}_{\partial\Sigma}(\vec{r})\,\cdot\,\mathrm{d}\vec{S}}_{=L} = L\,I(t)$$

Esta constante de proporcionalidad, habitualmente denotada por el símbolo L , es la **autoinducción de la bobina**. Se trata de una magnitud física, cuya unidad de medida en el SI es el **henrio** (H), y que puede definirse como la relación entre el *autoflujo* $\Phi_m^{\rm cor}$ a través de la bobina, y la intensidad $I(t)$la corriente que la recorre. Obsérvese que, en un caso más general como el que nos ocupa, en que además existe otro campo magnético externo independiente de dicha corriente, se puede determinar la autoinducción de la bobina en términos de la derivada del flujo magnético total con respecto a la intensidad de la corriente:

$$L = \frac{\Phi_m^{\rm cor}(t)}{I(t)}, \quad \text{o bien} \ldots \qquad \frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}I} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}\Phi_m^{\rm ext}}{\mathrm{d}I}}_{=0} + \frac{\mathrm{d}\Phi_m^{\rm cor}}{\mathrm{d}I} = L$$

Caso particular de *bobina larga*

Como se ha discutido antes, la autoindución depende exclusivamente de la geometría de la bobina, pues ésta va a determinar la forma del campo magnético producido por la corriente que la recorra. Consideremos el caso particular de que la geometría de la bobina permite asumir la aproximación de **bobina larga** y, por tanto, contamos con una expresión analítica aproximada del campo magnético: prácticamente uniforme en el interior de la bobina y (casi)nulo en los puntos exteriores.

Si $\partial\Sigma$ es una bobina recta formada por N espiras iguales situadas en planos paralelos, perpendiculares todos ellos al eje OZ, la superficie Σ que determina se puede definir como el conjunto de las N superficies planas S_i determinadas, cada una de ellas, por una de las N espiras. Éstas superficies planas tendrán igual área e igual orientación:

$$\Sigma \equiv S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_N, \quad \text{tales que} \quad \forall\, S_i \begin{cases} \mathrm{d}\vec{S}\rfloor_{P\in S_i} = \mathrm{d}S\,\vec{k} \\ \displaystyle\int_{S_i} \mathrm{d}S = S \end{cases}$$

El flujo del campo magnético a través de Σ (es decir, a través de la bobina) será igual a la suma de los flujos a través de esas N superficies planas. Obsérvese que asumir la uniformidad del campo magnético en el interior de la bobina, implica que éste va a ser prácticamente idéntico idéntico en todos los puntos de las N superficies planas S_i. Por tanto, el flujo magnético será igual a N veces el flujo a través de la superficie S_i delimitada por una cualquiera de las espiras:

$$\Phi_m^{\text{cor}}(t)\rfloor_\Sigma = \int_\Sigma \vec{B}_{\text{cor}}(\vec{r};t)\cdot\mathrm{d}\vec{S} \approx I(t)N\int_{S_i}\mu_0 n\vec{k}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = I(t)N\mu_0 n\int_{S_i}\mathrm{d}S = \mu_0 NnSI(t)$$

Y aplicando la definición de **autoinduccion** se obtiene que el valor de éste parámetro en el caso de una bobina recta, formada por N espiras iguales de área S, para la **aproximación de bobina larga** con una densidad de n de espiras por unidad de longitud, es:

$$L_0 = \mu_0\,N\,n\,S = \mu_0\,N\,n\,\pi\,a^2$$

... si las espiras son circunferencias de radio a.

Y tras este preámbulo teórico, procedemos a la inmediata resolución del ejercicio propuesto:

2.1 Flujo magnético a través de la bobina

Tal como acabamos de discutir, al estar la bobina cortocircuitada y sometida a un campo magnético *externo* variable, el flujo magnético a través de la misma puede puede descomponerse en dos términos: el correspondiente a dicho campo externo, Φ_m^{ext}, y el debido al campo magnético creado por la corriente inducida en la bobina, Φ_m^{cor}. Nótese que en el enunciado no se dan detalles concretos acerca de la geometría de la bobina, por lo que desconocemos cómo puede ser el campo $\vec{B}_{\text{cor}}(\vec{r};t)$, ni si podemos aplicar correctamente la aproximación de bobina larga. Sin embargo, sí se aporta el dato de que la autoinducción de la bobina tiene una valor conocido L. Por tanto, el *autoflujo* magnético queda completamente determinado por la intensidad de la corriente eléctrica que circule por la bobina, según la expresión:

$$\boxed{\Phi_m^{\text{cor}}(t) = \int_\Sigma \vec{B}_{\text{cor}}(\vec{r};t)\cdot\mathrm{d}\vec{S} = L\,I(t)}$$

En cuanto al flujo magnético externo, en el enuciado se indica que el campo que lo produce es variable en el tiempo y uniforme. Es decir, en todo instante, este campo magnético externo es idéntico en todos los puntos del espacio que ocupa y rodea la bobina. Por tanto, de manera análoga a lo que ocurría con el campo generado por la corriente en la aproximación de bobina larga, el flujo a travñés de la bobina del campo externo uniforme será igual a N veces el flujo de dicho campo a través de una cualquiera de las espiras; por tanto:

$$\Phi_m^{\text{ext}}(t) = \int_\Sigma \vec{B}_{\text{ext}}(t)\cdot\mathrm{d}\vec{S} = N\int_{S_i} B(t)\,\vec{k}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = N\,B(t)\int_{S_i}\mathrm{d}S \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\Phi_m^{\text{ext}}(t) = N\,B(t)\,S = N\,\pi\,a^2\,B(t)}$$

Finalmente, el flujo magnético total a través de la bobina circuitada de autoinducción L, sometida al campo magnético externo variable $\vec{B}_{\text{ext}} = B(t)\,\vec{k}$ y recorrida por una corriente de intensidad $I(t)$, es:

$$\boxed{\Phi_m(t)\rfloor_\Sigma = \Phi_m^{\text{ext}}(t)\; + \;\Phi_m^{\text{cor}}(t) = N\pi a^2\,B(t)\; + \;L\,I(t)}$$

2.2 Condiciones para corriente estacionaria en la bobina

En la expresión anterior, la función del tiempo $B(t)$ es la característica del campo magnético externo aplicado y, por tanto, independiente de la bobina. De hecho, va a actuar como la causa que tendrá como efecto la corriente eléctrica de intensidad $I(t)$ que recorre la bobina cortocircuitada, pero sin estar conectada a generador alguno.

Aplicando las leyes del electromagnetismo que repasamos en el preámbulo, se obtiene:

$$I(t) = \frac{1}{R}\,\mathcal{E}(t)\big]_{\partial\Sigma} = -\frac{1}{R}\,\frac{\mathrm{d}\Phi_m(t)}{\mathrm{d}t}\bigg]_{\Sigma} \quad\Longrightarrow\quad I(t) = -\frac{1}{R}\left[N\pi a^2\,\frac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t} \;+\; L\,\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}\right]$$

... que es la ecuación diferencial de primer orden que establece la relación entre la causa $B(t)$ (el campo externo), y el efecto que produce, $I(t)$ (la intensidad de la corriente inducida).

En el ejercicio se plantea la cuestión de cómo debe ser la componente $B(t)$ del campo magnético externo variable, para que produzca como efecto una corriente estacionaria de intensidad constante, I_0. Obviamente, causa y efecto deben verificar la anterior ecuación diferencial; por tanto...

$$\left.\begin{array}{l} I(t) = I_0 \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \end{array}\right\}\ \forall\, t \quad\Longleftrightarrow\quad \vec{B}_{\mathrm{ext}}(t) = B(t)\,\vec{k},\quad \text{tal que}\quad R\,I_0 = -N\pi a^2\,\frac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t}$$

Es decir, la componente del campo externo debe ser una función del tiempo tal que su derivada sea una constante negativa. En consecuencia, $B(t)$ debe variar linealmente en el tiempo:

$$\boxed{\vec{B}_{\mathrm{ext}}(t) = B(t)\,\vec{k},\quad \text{tal que}\quad B(t) = \int \dot{B}(t)\,\mathrm{d}t = B_0 \;-\; \frac{R\,I_0}{N\pi a^2}\;t}$$

donde B_0 es cualquier valor constante. También hay que puntualizar que, en general, la corriente estacionaria de intensidad I_0 se establecería tras un cierto período transitorio. Se puede demostrar que la duración de dicho período transitorio estaría determinada por los valores de autoinducción y resistencia de la bobina. Si suponemos que inicialmente el campo externo es constante (y, por tanto, nula la intensidad de corriente en la bobina), y en un cierto instante $t = 0$ se inicia la variación temporal de $B(t)$ según la anterior ley horaria, se tendrá...

$$I(t) = I_0,\quad \forall\, t \gg \;\tau = L/R$$

2.3 Energía almacenada y potencia disipada

Cuando en un circuito de autoinducción L se establece una corriente eléctrica, cuya intensidad pasa desde un valor inicial nulo hasta que en un cierto instante t alcanza un cierto valor $I(t)$, es necesario suministrar una energía extra, que se denomina **energía magnética**, y cuyo valor es...

$$W_m[0 \to I(t)] = \int_0^{I(t)} L I\,\mathrm{d}I = \frac{1}{2}\;L\,I^2(t)$$

Por tanto,una vez alcanzada la corriente eléctrica estacionaria en el sistema bajo estudio, la energía magnética almacenada en la bobina será:

$$\boxed{W_m[0 \to I_0] = \int_0^{I_0} L I\,\mathrm{d}I = \frac{1}{2}\;L\,I_0^2}$$

Esta energía extra es la necesaria para establecer el campo magnético estacionario $\vec{B}_{\mathrm{cor}}$ creado por la corriente I_0 en la bobina.

En cuanto a la **potencia disipada** por efecto Joule (es decir, energía perdida por unidad de tiempo en la bobina debido a la resistencia eléctrica del cable), cuando se alcanza el estado estacionario es...

$$I(t) = I_0 \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\mathcal{P}_{\mathrm{Jou}} = \left|\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{dis}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\partial\Sigma} = R\,I_0^2}$$